

Title	コンパクトな統計的構造 (その1) (統計的構造)
Author(s)	山田, 作太郎
Citation	数理解析研究所講究録 (1972), 150: 77-85
Issue Date	1972-06
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/106786">http://hdl.handle.net/2433/106786</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## コンパクトな統計的構造 その1

東京水産大 山田作太郎

序

統計的問題を考察するとき最も基礎になるのは集合  $X$ , その部分集合のつくる  $\sigma$ -代数  $S$ ,  $(X, S)$  上の確率測度の集合  $M$  の三つの集合である。 $(X, S)$  上の  $\sigma$ -有限な測度  $\mu$  が存在して  $M$  の任意の元  $\nu$  に関して絶対連続であるとき,  $(X, S, M)$  は *dominated* であるという。この場合にはいろいろ詳しく今までに議論されてきた。しかし *dominated* な統計的構造を持ていない統計的問題もたくさんあるわけで, そのようなときつまり *dominated* な構造をもっていることを仮定しない一般の場合には未解決の問題もあり, また *dominated* なときに成り立っても一般の場合には成り立たぬこともある。ここでは *dominated* よりもむしろ一般的な条件である *compact* な構造をもつ  $(X, S, M)$  について, §1 で Pitcher [1] の論文の内容を一部紹介し §2 で二, 三の問題を考えてみる。

- §1. Pitcher の結果 (証明はきちんとすると長くなるのですが略証にする。)

実数値  $S$  可測関数  $f$  の  $L_p(\mu)$  ノルムを  $\|f\|_{p,\mu}$  で表わすとき,  $\|f\|_{p,\mu} = \sup_{M \in \mathcal{M}} \|f\|_{p,M}$  とおく。  $1 \leq p \leq \infty$  に対して  $E_p(X, S, M) = \{f : \|f\|_{p,M} < \infty\}$  とする。

補題1  $E_p$  は  $\|f\|_{p,M}$  をノルムとするバナッハ空間である。(証明略)  
 任意に  $\mu \in \mathcal{M}$ ,  $h \in L_1(\mu)$  ( $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ) をとて  $\ell(h, \mu)(f) = \int f h d\mu$  ( $f \in E_p$ ) とおくと  $\ell(h, \mu) \in E_p^*$  ( $E_p$  の共役空間) となる。 $\mu$  と  $h$  を動かしてこれら  $\ell(h, \mu)$  の有限個の一次結合の全体を  $E_p(X, S, M)$  とする。  
 $E_p$  は  $E_p^*$  の *total subset* になっているから  $E_p$  上に  $E_p$  の元すべてを連続にする最弱の  $T_2$  位相が入る。これを  $E_p$  位相と呼ぶ。 $B_p$  をもって  $E_p$  の閉単位球を表わす。

定義 ある  $1 < p < \infty$  に対して,  $B_p$  が  $E_p$  位相でコンパクトになるとき  $(X, S, M)$  はコンパクトであるという。ある  $1 < p < \infty$  でコンパクトであればすべての  $1 < p < \infty$  でコンパクトになる(定理3.3)

この定義によれば  $M$  が 1 点  $\mu$  からなるとき,  $E_p = L_p(\mu)$ ,  $E_p$  位相は  $L_p(\mu)$  上の弱位相と一致する。 $B_p = W_p(\mu)$  と, このときおくと  $1 < p < \infty$  のとき  $L_p(\mu)$  は回帰的であるから  $W_p(\mu)$  は弱位相に関してコンパクト故に  $(X, S, M)$  はコンパクトになる。 $M$  の元の数をふやしてゆくとまじこまじコンパクトを保存するか? 後に  $(X, S, M)$  が *dominated* のときには  $(X, S, M)$  はコンパクトになる。つまりコンパクトは *dominated* より一般的な概念であることを示す。(定理7)  $M$  を  $M$  から generate される convex set  $C(M)$  でおきかえてもよい。つまり

$E_p(X, S, M) = E_p(X, S, C(M))$ ,  $\|f\|_{p, M} = \|f\|_{p, C(M)}$ ,  $E_p(X, S, M) = E_p(X, S, C(M))$  となるのである。

$1 < p < \infty$  のとき,  $W_p(\mu)$  は  $L_p(\mu)$  上の弱位相に関してコンパクトになる。よって  $\prod_{\mu \in M} W_p(\mu)$  は弱位相の直積弱位相でコンパクトとなる。 $\forall \mu \in M$  に対して  $B_p \subset W_p(\mu)$  故  $\varphi(f) = (f) \in \prod_{\mu \in M} W_p(\mu)$  なる  $B_p$  への  $\prod_{\mu \in M} W_p(\mu)$  への写像  $\varphi$  が定義できる。 $\prod_{\mu \in M} W_p(\mu)$  に弱位相の直積弱位相を考えれば  $\varphi$  が連続になる最弱の位相を  $B_p$  上に入れたとき, この位相は  $E_p$  位相の  $B_p$  上への相対位相と一致することとを注意する。

定理 1  $(X, S, M)$  がコンパクトになるための必要十分条件は, ある  $1 < p < \infty$  に対して  $\varphi(B_p)$  が閉集合になることである。

(略証)  $(X, S, M)$  がコンパクトであるとする。上に注意したことから  $\varphi(B_p)$  はコンパクト。 $\prod_{\mu \in M} W_p(\mu)$  は  $T_2$  故  $\varphi(B_p)$  は閉集合。 $(f) \in \varphi(B_p)$  として  $\varphi^{-1}((f)) = f \in B_p$  と定義する。 $\varphi(B_p)$  はコンパクトで,  $\varphi^{-1}$  は弱位相と  $E_p$  位相に関して連続であることが容易に示せて, よって  $\varphi^{-1}(\varphi(B_p)) = B_p$  は  $E_p$  位相でコンパクト。よって  $(X, S, M)$  はコンパクト。

補題 2  $(f_\mu) \in \prod_{\mu \in M} W_p(\mu)$  とする。次の 3 つの条件は互いに同値である。(1)  $(f_\mu) \in \overline{\varphi(B_\infty)}$  (2) 任意の有限集合  $\{\mu_1, \dots, \mu_n\} \subset M$  に対してある  $f \in B_\infty$  が存在して  $f = f_{\mu_i}[\mu_i]$   $i=1, 2, \dots, n$  が成り立つ。

(3) 任意の可算集合  $\{\mu_1, \dots, \mu_n, \dots\} \subset M$  に対して, ある  $f \in B_\infty$  が存在して  $f = f_{\mu_i}[\mu_i]$   $i=1, 2, \dots, n, \dots$  が成り立つ。(証明は長くなるので略する。)

定理 2.  $B_\infty$  上ではすべての  $1 \leq p < \infty$  に対して  $E_p$  位相と  $E_1$  位相は一致

する。(略証)  $B_\infty$ 上定義より  $E_p$ 位相の方が  $E_1$ 位相より強いのは明らかである。一方  $E_p$ の各元は  $B_\infty$ 上  $E_1$ のある列の一致収束極限になる、といふことが容易に示せて、従って  $B_\infty$ 上両方の位相は一致する。定理3 ある  $1 < p < \infty$  に対して  $B_p$ が  $E_p$ 位相でコンパクトになる必要十分条件は  $B_\infty$ が  $E_1$ 位相でコンパクトになることである。

(略証)(必要)  $i_p(B_p)$ が  $\prod_{\mu \in M} W_p(\mu)$  でコンパクト。  $i_p(B_\infty) \subset i_p(B_p)$  は閉集合であることが容易に示せて従ってコンパクト。  $i_p^{-1}: i_p(B_p) \rightarrow B_p$  は連続であるから  $i_p^{-1}(i_p(B_\infty)) = B_\infty$  は  $E_p$ 位相でコンパクト。定理2より  $B_\infty$ は  $E_1$ 位相でコンパクト。(十分) 勝手な  $1 < p < \infty$  をとり、  $(f_\mu) \in \overline{i_p(B_p)}$  を勝手にとる。  $f_\mu^{(n)}(x) = f_\mu(x)$  if  $|f_\mu(x)| \leq n$ , = 0 otherwise  $f_\mu^{(n)}$  を定義するとすべての  $n$  に対して  $(\frac{1}{n} f_\mu^{(n)}) \in i_p(B_\infty)$  となる。定理2より  $B_\infty$ は  $E_p$ 位相でコンパクト。よって  $i_p(B_\infty)$ はコンパクト従って閉集合。よってある  $b_n \in B_\infty$  が存在して  $\frac{1}{n} f_\mu^{(n)} = b_n[\mu]$  for all  $\mu \in M$ . このときある  $f \in B_p$  が存在して  $n b_n \rightarrow f[\mu]$  for all  $\mu \in M$ ,  $f = f_\mu[\mu]$  for all  $\mu \in M$  となる。よって  $i_p(B_p)$  は closed. 定理1より  $(X, S, M)$  はコンパクト。

定理4  $(X, S, M)$  がコンパクトであるための必要十分条件はある  $1 < p < \infty$  に対して  $i_p(B_\infty)$  が  $\prod_{\mu \in M} W_p(\mu)$  で閉集合となることである。

(略証) 定理3の証明より明らか。

定理5  $(X, S, M)$  がコンパクトで  $M' \subset M$  ならば  $(X, S, M')$  もコンパクト。

(略証) 定理3より  $B_\infty(X, S, M)$  が  $E_1(X, S, M)$  位相でコンパクト。よって

$B_\infty(X, S, M)$  から  $B_\infty(X, S, M')$  への恒等写像とする。 $B_\infty(X, S, M)$  には  $E_1(X, S, M)$  位相  $B_\infty(X, S, M')$  には  $E_1(X, S, M')$  位相を入れると  $\psi$  はこの両方の位相に関して連続さすに全射となる。よって  $B_\infty(X, S, M')$  は  $E_1(X, S, M)$  位相でコンパクトよって  $(X, S, M')$  はコンパクト。(定理3)。

定理6  $\overline{M} = \{\nu\}$   $\nu$  は確率測度,  $\exists \{\mu_i\}_{i=1,2,\dots} \subset M, \nu \ll \{\mu_i\}$  とする。 $(X, S, M)$  がコンパクトならば  $(X, S, \overline{M})$  もコンパクト。

(略証) 任意に  $\nu \in \overline{M}$  をとる。定義より  $\exists \{\mu_i\} \subset M \Rightarrow \nu \ll \{\mu_i\}$ 。

このとき  $S$  可測な関数列  $\{f_n\}_{n=1,2,\dots}$  で次式をみたすものが存在することは容易にわかる。 $\forall E \in S$  に対して  $\nu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu_i$ 。任意に  $l(f_n, \nu) \in E_1(X, S, \overline{M})$  をとる。このとき  $f_n$  は有界関数としてよい。

$\sum_{i=1}^n l(\inf(f_n), f_n, \mu_i) \in E_1(X, S, M)$  がすべての  $n$  に対して成り立ち  $B_\infty(X, S, \overline{M})$  上  $\sum_{i=1}^n l(\inf(f_n), f_n, \mu_i)$  は  $l(f_n, \nu)$  に一様収束する。よって

$B_\infty(X, S, \overline{M})$  上  $E_1(X, S, M)$  位相と  $E_1(X, S, \overline{M})$  位相とは一致し,  $B_\infty(X, S, \overline{M})$  は  $E_1(X, S, M)$  位相でコンパクトとなることがわかるから,  $B_\infty(X, S, \overline{M})$  は  $E_1(X, S, \overline{M})$  位相でコンパクトよって  $(X, S, \overline{M})$  はコンパクト。

定理7  $(X, S, M)$  が dominated ならば  $(X, S, M)$  はコンパクト。

(証明)  $M \ll \mu$  とする。 $\mu$  は確率測度としてよい。最初  $K$  のでたように  $(X, S, \{\mu\})$  はコンパクト。よって定理6より  $(X, S, \overline{M})$  もコンパクト。 $M \ll \mu$  より  $M \subset \overline{M}$  よって定理5より  $(X, S, M)$  はコンパクト。

[例1]  $\alpha \in \Lambda$ .  $(X_\alpha, S_\alpha, M_\alpha)$  はコンパクトとする。ただし  $\alpha, \beta \in \Lambda, \alpha \neq \beta$  ならば  $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$  とする。勿論任意の  $\Lambda$  に対して上の条件をみ

たす  $(X_\alpha, S_\alpha, M_\alpha)$  は存在する。  $X \equiv \bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ ,  $S \equiv \{A \mid A \subset X, A \cap X_\alpha \in S_\alpha \text{ for all } \alpha \in \Lambda\}$ ,  $\mu \in M_\alpha$  のとき  $\mu \in S$  に,  $A \in S$  のとき  $\mu(A) = \mu(A \cap X_\alpha)$  により拡張しておく。拡張した  $\mu$  の全体を  $M$  とおく。

このとき  $(X, S, M)$  がコンパクトになることは定理 1 を使って簡単に示せる。一方  $\Lambda$  が非可算であれば  $(X, S, M)$  は *dominated* ではない。よって *compact* は *dominated* よりもほんとうに一般的な条件である。

(例 2) コンパクトでない例もある。  $X = [0, 1]$ ,  $S$  を  $X$  上のボレル集合の全体,  $M$  を  $X$  上の単位分布または  $X$  上のルベーグ測度により *dominate* されている確率測度全体とする。  $A \subset X$  とする。

$f_\mu(x) = 1$  if  $x \in A$ ,  $\mu(\{x\}) = 1$ . その他のとき  $= 0$  とする。任意の  $1 < p < \infty$  に対して  $(f_\mu)_{\mu \in M} \in \overline{L^p(B_p)}$  が示せる。よってもし  $(X, S, M)$  がコンパクトならば  $B_p$  の元  $b$  が存在して  $b = f_\mu$  for all  $\mu \in M$  となる。従って  $b = \chi_A$  でなければならぬ。  $b$  は  $S$  可測。しかし  $A \notin S$  とするとこれは矛盾である。よって  $(X, S, M)$  はコンパクトではない。

(注意) 以上コンパクトな統計的構造を紹介してきたが *pitcher* はさらにいうべき結果を得ている。その中で特に大切と思われる結果を二つをのべておく。(1)  $(X, S, M)$  がコンパクトなときには最小十分  $\sigma$ -代数が存在する。(2)  $E_p(X, S, M)$  が回帰的ならば  $(X, S, M)$  は *dominated* である。

## §2. 2つの問題

$\rho \in (X, S)$  上の確率測度の全体とする。  $\rho \ni \mu, \nu$  に対して

$$\alpha(\mu, \nu) = \sup_{A \in S} |\mu(A) - \nu(A)| \text{ とおく。 } \rho \text{ は距離空間となる。}$$

以下この位相を考える。(定理1)(系)。

定理1.  $(X, S, M)$  がコンパクトならば  $(X, S, \overline{C(M)})$  もコンパクト。

(証明)  $(X, S, M)$  がコンパクトならば  $(X, S, C(M))$  もまたコンパクト (これは §1 の最初に注意した。) 勝手な  $\mu \in \overline{C(M)}$  をとり、

$$V_n(\mu) = \{ \nu \mid \alpha(\mu, \nu) < \frac{1}{n} \} \quad (n: \text{自然数}) \text{ とおく。このとき任意の}$$

$n$  に対して  $\nu_n \in C(M) \cap V_n(\mu)$  が存在する。今  $\nu_n(A) = 0, n=1, 2, \dots$

$A \in S$  なる  $A$  を勝手にとると、  $|\mu(A) - \nu_n(A)| \leq \alpha(\mu, \nu_n) < \frac{1}{n} \quad n=1, 2, \dots$

$\therefore$  全ての  $n$  に対して  $\mu(A) < \frac{1}{n}$  故に  $\mu(A) = 0$

故に  $\mu \ll \{\nu_n\} \subset C(M)$ 。  $M_0 = \{ \nu \mid \nu \text{ は確率測度, } \exists \{\nu_n\} \subset C(M) \nu \ll \{\nu_n\} \}$  とおくと  $\overline{C(M)} \subset M_0$ 。定理6より  $(X, S, M_0)$  はコンパクトより、定理5より  $(X, S, \overline{C(M)})$  もコンパクト。

系  $(X, S, M_i) \quad i=1, 2$  はコンパクトとする。  $M = M_1 \cup M_2$  とおく。

$M_1$  または  $M_2$  が  $M$  で dense であれば  $(X, S, M)$  はコンパクトとなる。

(証明) 定理1より明らか。

(注意)  $(X, S, M_i) \quad i=1, 2$  がコンパクトであっても、一般には  $(X, S,$

$M_1 \cup M_2)$  はコンパクトにはならない。なお次のことは定理6

よりわかる。  $(X, S, M_i) \quad i=1, 2$  はコンパクトであるとする。すべての

$\mu_1 \in M_1 - M_2$ 、すべての  $\mu_2 \in M_2 - M_1$  が互いに絶対連続であれば、



$(X, S, M_1 \cup M_2)$  はコンパクトになる。

定理 2  $M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_n \subset \dots$ ,  $(X, S, M_n)$  はコンパクトとする。  $n=1, 2, \dots$

$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$  とおくと,  $(X, S, M)$  はコンパクトになる。

(証明)  $(f_\mu)_{\mu \in M} \in \overline{\text{ip}(B_{\infty}(X, S, M))}$  を勝手  $k$  とする。このときすべての  $n$  に対して  $(f_\mu)_{\mu \in M_n} \in \overline{\text{ip}(B_{\infty}(X, S, M_n))} \subset \prod_{\mu \in M_n} W_p(\mu)$  となる。何故なら, 勝手に  $(f_\mu)_{\mu \in M_n}$  の近傍  $V((f_\mu)_{\mu \in M_n}) = V(f_{\mu_1}) \times \dots \times V(f_{\mu_k}) \times \prod_{\substack{\nu \neq \mu_j \\ \nu \in M_n \\ j=1, \dots, k}} W_p(\nu)$

をとる。今  $V((f_\mu)_{\mu \in M}) = V(f_{\mu_1}) \times \dots \times V(f_{\mu_k}) \times \prod_{\substack{\nu \neq \mu_j \\ \nu \in M \\ j=1, \dots, k}} W_p(\nu)$  (ただし  $V(f_{\mu_j})$  は上に  $\tau_k$  ものと同じとする。) とおく。

$(f_\mu)_{\mu \in M} \in \overline{\text{ip}(B_{\infty}(X, S, M))} \subset \prod_{\mu \in M} W_p(\mu)$  故  $V((f_\mu)_{\mu \in M}) \cap \text{ip}(B_{\infty}(X, S, M))$

≠ ∅ かつ  $g \in B_{\infty}(X, S, M)$  が存在して  $(g)_M \in V((f_\mu)_{\mu \in M})$ 。

$g \in B_{\infty}(X, S, M) \subset B_{\infty}(X, S, M_n)$  であるから  $(g)_{M_n} \in V((f_\mu)_{\mu \in M_n}) \cap$

$\text{ip}(B_{\infty}(X, S, M_n))$  かつ  $(f_\mu)_{\mu \in M_n} \in \overline{\text{ip}(B_{\infty}(X, S, M_n))}$  となる。 $(X, S, M_n)$

はコンパクト故  $\text{ip}(B_{\infty}(X, S, M_n))$  は閉集合。よって  $h_n \in B_{\infty}(X, S, M_n)$

が存在して  $f_\mu = h_n[\mu]$  for all  $\mu \in M_n$  が成り立つ。今

$h'_n(x) = h_n(x)$  if  $|h_n(x)| \leq 1$ , = 0 その他とおくと  $h'_n = h_n[\mu]$  for

all  $\mu \in M_n$  故に存在する  $h_n$  は最初から  $|h_n(x)| \leq 1$  for all  $x \in X$  をみ

ておけるものとしてよい。  $h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x)$  if  $x \in \{x: \exists \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x)\}$

= 0 その他とおくとすべての  $x \in X$  に対して  $|h(x)| \leq 1$  故に  $h \in$

$B_{\infty}(X, S, M)$ 。今勝手に  $\mu \in M$  とする。番号  $n_0$  が存在してすべての

$n \geq n_0$  に対して  $\mu \in M_n$  となる。よって  $h_n = f_\mu[\mu]$ 。

$N_{n,\mu} = \{x: h_n(x) \neq f_\mu(x)\}, \quad N_\mu = \bigcup_{n \geq n_0} N_{n,\mu} \quad \varepsilon_0 < \varepsilon, \mu(N_{n,\mu}) = 0$   
 故  $\mu(N_\mu) = 0$ .  $x \in N_\mu$  のとき,  $f_\mu(x) = h_{n_0}(x) = h_{n_0+1}(x) = \dots$ .  
 よって  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = f_\mu(x)$ . よって  $h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x)$  よって  $N_\mu^c \subset \{x: \exists \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x)\}$   
 よって  $\{x: \nexists \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x)\} \subset N_\mu$  故に  $\mu(\{x: \nexists \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x)\}) = 0$ .  
 $x \in N_\mu$  なる上に示したように  $h(x) = f_\mu(x)$  よって  $\{x: h(x) \neq f_\mu(x)\} \subset N_\mu$  従って  $h = f_\mu[\mu]$   $\mu$  は勝ちである. 故に  $h \in B_\infty(X, S, \mu)$   
 である. 故に  $(f_\mu)_{\mu \in M} \in \text{ip}(B_\infty(X, S, \mu))$  つまり  $\text{ip}(B_\infty(X, S, \mu))$  は  
 $\prod_{\mu \in M} W_p(\mu)$  で閉集合. よって  $(X, S, \mu)$  は コンパクト.

### 参考文献

- [1] T.S. Pitcher a more general property than domination  
 for sets of probability measures Pacific J. of Math.  
 1965 vol 15 No 2 P. 597 — 611